

Bases de numération

I./ Fonctionnement du système décimal :

Les différents chiffres constituant le nombre représentent les puissances de 10 successives :

$$6571 = 6 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 1 = 6 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

On peut aussi retrouver cette décomposition, en faisant des divisions par 10 successives :

$$6571 \div 10 = 657 \text{ et il reste } 1.$$

$$657 \div 10 = 65 \text{ et il reste } 7.$$

$$65 \div 10 = 6 \text{ et il reste } 5$$

$$6 \div 10 = 0 \text{ et il reste } 6.$$

Les restes successifs pris en sens inverse redonnent le nombre de départ, soit 6571.

II./ Numération binaire (base 2) :

On essaye maintenant d'écrire 6571 comme une somme de puissances de 2. On utilise donc la méthode des divisions successives avec le nombre 2 comme diviseur.

$$6571 \div 2 = 3285 \text{ et il reste } 1.$$

$$3285 \div 2 = 1642 \text{ et il reste } 1.$$

$$1642 \div 2 = 821 \text{ et il reste } 0.$$

$$821 \div 2 = 410 \text{ et il reste } 1.$$

$$410 \div 2 = 205 \text{ et il reste } 0.$$

$$205 \div 2 = 102 \text{ et il reste } 1.$$

$$102 \div 2 = 51 \text{ et il reste } 0.$$

$$51 \div 2 = 25 \text{ et il reste } 1.$$

$$25 \div 2 = 12 \text{ et il reste } 1.$$

$$12 \div 2 = 6 \text{ et il reste } 0.$$

$$6 \div 2 = 3 \text{ et il reste } 0.$$

$$3 \div 2 = 1 \text{ et il reste } 1.$$

$$1 \div 2 = 0 \text{ et il reste } 1.$$

Les restes pris à l'envers donnent le nombre : 1100110101011, et on remarque que l'on a effectivement :

$$6571 = 1 \times 2^{12} + 1 \times 2^{11} + 0 \times 2^{10} + 0 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

Le nombre décimal 6571 s'écrit donc 1100110101011 en binaire. Comme précédemment, on s'aperçoit que la numération binaire ne comporte que 2 symboles, le reste d'une division par 2 ne pouvant être que 0 ou 1. Les « chiffres » binaires s'appellent des bits (binary digits). Le nombre étudié dans l'exemple comporte 13 bits.

III./ Numération hexadécimale (base 16) :

Le problème est le suivant : pour écrire un nombre en base 16, il faut disposer de 16 symboles différents. Or nous ne disposons que de 10 chiffres, de 0 à 9. Pour avoir 16 symboles, on ajoute donc les six premières lettres de l'alphabet. Les « chiffres » hexadécimaux sont donc :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

On reprend notre exemple (6571) avec des divisions successives par 16 :

$$6571 \div 16 = 410 \text{ et il reste } 11.$$

$$410 \div 16 = 25 \text{ et il reste } 10.$$

$$25 \div 16 = 1 \text{ et il reste } 9.$$

$$1 \div 16 = 0 \text{ et il reste } 1.$$

Les restes successifs pris en sens inverse sont : 1, 9, 10 et 11. 10 s'écrit « A » et 11 s'écrit « B » en base 16. Le nombre décimal 6571 s'écrit donc 19AB en base 16 : $(6571)_{10} = (19AB)_{16}$.

On remarque qu'on a bien :

$$6571 = 1 \times 16^3 + 9 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 11 \times 16^0$$

IV./ Mais quel est l'intérêt de tout ça ?

Le système binaire est très utile pour coder les nombres à l'aide de signaux électriques : on peut par exemple choisir la convention suivante :

Le courant passe = 1 / Le courant ne passe pas = 0

Les ordinateurs utilisent donc le système binaire pour représenter les nombres. Le problème est que la base 2 n'est pas pratique pour les êtres humains : lorsque la valeur du nombre augmente, le nombre de bits croît très rapidement. Pour garder une écriture de taille raisonnable, il faut donc choisir une base plus grande que 2. Pour des raisons mathématiques, il est très pratique d'utiliser une base qui soit un multiple de 2, car cela rend les conversions plus simples. D'où l'intérêt des bases 8 et 16, qui permettent d'écrire de façon plus lisible les nombres binaires manipulés par les ordinateurs. De nos jours la base 8 n'est plus utilisée.

Exemple :

Dec	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Bin	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
Hex	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

$$(1100101011111110)_2 \Rightarrow 1100 \ 1010 \ 1111 \ 1110 \Rightarrow C \ A \ F \ E \Rightarrow (CAFE)_{16}.$$